Binomna formula (obrazac)

$n!$ - čitamo n faktorijel

n je prirodan broj (pozitivan cijeli broj) $(1, 2, 3, \dots)$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

$\binom{n}{k}$ - čitamo n nad k

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(k-2)][n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad n \geq k$$

ako je $k > n$ $\binom{n}{k} = 0$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

npr. $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$, $\binom{3}{5} = 0$,

$\binom{21}{18} = \binom{21}{3} = \frac{\overset{7}{\cancel{21}} \cdot \overset{10}{\cancel{20}} \cdot 19}{1 \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = 1330$, $\binom{7}{7} = 1$.

Za svaka dva realna broja a i b, i za svaki prirodan broj n važi:

koeficijent prvog člana, koeficijent drugog člana, koeficijent posljednjeg člana

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0} a^n}_{\text{vrijednost prvog sabirnika}} + \underbrace{\binom{n}{1} a^{n-1} b}_{\text{vrijednost drugog sabirnika}} + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n} b^n}_{\text{vrijednost posljednjeg sabirnika}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{binomni obrazac}$$

vrijednost sabirnika

koeficijenti binomnog razvoja

$$n! = (n-1)! \cdot n$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$0! = 1! = 1$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n+1}{k+1}$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)$$

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

1. Razviti izvaz $(2x-3)^5$.

Rj. $(2x-3)^5=\binom{5}{0}(2x)^5+\binom{5}{1}(2x)^4(-3)+\binom{5}{2}(2x)^3(-3)^2+\binom{5}{3}(2x)^2(-3)^3+$

$+\binom{5}{4}(2x)(-3)^4+\binom{5}{5}(-3)^5=2^5\cdot x^5+5\cdot(-3)\cdot 2^4\cdot x^4+10\cdot 2^3\cdot 9x^3$

$\binom{5}{5}=\binom{5}{0}=1,\quad \binom{5}{1}=\binom{5}{4}=\frac{5}{1}=5,\quad \binom{5}{3}=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10$

$+10\cdot 4\cdot(-3)^3x^2+5\cdot 2\cdot 81x+1\cdot 81\cdot(-3)=$

$=32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x-243$

2. U razvoju binoma $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6$ odrediti član koji ne sadrži x.

Rj. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(\sqrt{x})^{6-k}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}_{x^{-\frac{1}{4}}}\Big)^k=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{\frac{6-k}{2}}\cdot x^{-\frac{k}{4}}$

$=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{3-\frac{k}{2}-\frac{k}{4}}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{3-\frac{3k}{4}}$

Tražimo član koji ne sadrži x, tj. član koji sadrži x^0.

$3-\frac{3k}{4}=0$ $\qquad k=4$

$12-3k=0$ $\qquad$ Peti član u razvoju binoma ne sadrži x.

3. Odrediti koji član razvoja binoma $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ sadrži a^7.

Rj. $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-k}\cdot\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^k=$

$=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{12-k}a^{\frac{2(12-k)}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot a^{\frac{k}{2}}=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{12-k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot a^{8-\frac{2k}{3}+\frac{k}{2}}$

$=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{12-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k a^{8-\frac{k}{6}}$

Tražimo član koji sadrži a^7.

$8-\frac{k}{6}=7 \quad /\cdot 6$ $\qquad k=6$

$48-k=42$ $\qquad$ Sedmi član u razvoju binoma sadrži a^7.

(4.) Izračunati $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$.

Rj.
$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot 1^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$$

Prema tome $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$.

(5.) Koliko racionalnih članova ima u razvoju $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$.

Rj. Koji brojevi se zovu racionalni brojevi? Γ = Razlomci, bez $\sqrt{\ }$

$$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}(\sqrt{2})^{100-k}\cdot(\sqrt[4]{3})^k=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}2^{50-\frac{k}{2}}\cdot 3^{\frac{k}{4}}$$

U našem slučaju da bi član bio racionalan treba da su $50-\frac{k}{2}$ i $\frac{k}{4}$ cijeli brojevi, k uzima vrijednosti od 0 do 100.

$50-\frac{k}{2}$ će biti cijeli broj ako je $\frac{k}{2}$ cijeli broj, $\Rightarrow$ broj k je iz skupa $A=\{0,2,4,6,\ldots,90,92,94,96,98,100\}$

$\frac{k}{4}$ će biti cijeli broj ako je k iz skupa $B=\{0,4,8,\ldots,40,44,\ldots,80,84,\ldots,96,100\}$

$k\in A\cap B \Rightarrow$ 26 racionalnih članova ima u razvoju $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$

(6.) Naći članove u razvoju $(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x})^{10}$ koji su racionalni.

Rj. Racionalni brojevi? (svi brojevi u obliku razlomka) (npr. $\frac{73}{5}$)

$$(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x})^{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(\sqrt[4]{x^3})^{10-k}\cdot(\sqrt[3]{x})^k=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(x^{\frac{3}{4}})^{10-k}\cdot(x^{\frac{1}{3}})^k=$$

$$= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{\frac{30-3k}{4}} \cdot x^{\frac{k}{3}} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{\frac{30-3k}{4}+\frac{k}{3}} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{\frac{90-5k}{12}}$$

U ovom slučaju, da bi član bio racionalan potrebno je i dovoljno da je $\frac{90-5k}{12}$ cijeli broj tj. da je $90-5k$ djeljivo sa 12. Brojevi djeljivi sa 12 su $\{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, \dots\}$.

$\therefore$ $k=1$: $90-5=85$, $k=2$: $90-10=80$, $k=3$: $90-15=75$, $k=4$: $90-20=70$, $k=5$: $90-25=65$, $k=6$: $90-30=\underline{60}$,

$k=7$: $90-35=55$, $k=8$: $90-40=50$, $k=9$: $90-45=45$, $k=10$: $90-50=40$, $k=0$: $90-0=90$

2 član   prvi član   Sedmi član

Sedmi član u razvoju je racionalan.

(7.) Naći članove u razvoju $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{20}$ koji nisu racionalni.

Rj. Kakvi brojevi su iracionalni brojevi? (npr. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{73}, \dots$)

$$(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (\sqrt[5]{3})^{20-k} (\sqrt[7]{2})^{k} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} 3^{\frac{20-k}{5}} \cdot 2^{\frac{k}{7}}$$

Naći ćemo prvo koji članovi su racionalni.
Potrebno je i dovoljno da su $\frac{20-k}{5}$ i $\frac{k}{7}$ cijeli brojevi za istu vrijednost broja k.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{k}{7} \text{ cijeli broj} \Rightarrow k \text{ je djeljiv sa } 7 \\ \frac{20-k}{5} = 4-\frac{k}{5} \text{ cijeli broj} \Rightarrow k \text{ je djeljiv sa } 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} k\in\{0,1,2,3,\dots,20\} \\ \text{jedini } k \text{ koji je djeljiv} \\ \text{sa 5 i sa 7 je } k=0 \end{array}$$

$\therefore$ Svi članovi osim prvog nisu racionalni.

(8.) Za koju vrijednost promjenjive x u binomnom razvoju $\left(3x-\frac{1}{9x^2}\right)^n$ četvrti sabirnik ima vrijednost (-1), ako je koeficijent uz predposljednji član razvoja jednak 8.

Rj. $\binom{n}{n-1}=8$, $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=8 \Rightarrow n=8$

$$\left(3x-\frac{1}{9x^2}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (3x)^{8-k} \cdot \left(-\frac{1}{9x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 3^{8-k} \cdot x^{8-k} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^k \cdot x^{-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 3^{8-k} \cdot (-1)^k \cdot 3^{-2k} \cdot x^{-2k+8-k} = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 3^{8-3k} \cdot (-1)^k \cdot x^{8-3k}$$

vrijednost četvrtog sabirnika je -1, $\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$

$$\binom{8}{3} 3^{8-9}\cdot(-1)^3\cdot x^{8-9} = 56\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x} = -\frac{56}{3x}$$

$$-\frac{56}{3x} = -1 \Rightarrow x = \frac{56}{3}$$

Za $x = \frac{56}{3}$ četvrti sabirnik u binomnom razvoju ima vrijednost (-1).

9. Odrediti koji član razvoja binoma $\left(4\sqrt[5]{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^n$ sadrži $x^2\cdot\sqrt[5]{x^4}$ ako je zbir prva tri binomna koeficijenta jednak 56.

Rj. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 56$

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 56 \quad /\cdot 2$$

$$2 + 2n + n^2 - n = 112$$

$$n^2 + n - 110 = 0$$

$$D = 1 + 440 = 441$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm 21}{2}$$

$n_1 = -11$ ovo rješenje otpada, $n_2 = 10$

$$\frac{k}{3} - \frac{k}{5} = \frac{5k-3k}{15}$$

$$\left(4\sqrt[5]{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(4\sqrt[5]{x}\right)^{10-k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k} 2^{20-2k}\cdot 2^{-k}\cdot x^{2-\frac{k}{5}}\cdot x^{\frac{k}{3}}$$

$$= \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k} 2^{20-3k}\cdot x^{2+\frac{2k}{15}}, \quad x^2\sqrt[5]{x^4} = x^{2+\frac{4}{5}}, \quad \frac{2k}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow k = 6$$

Sedmi član razvoja binoma sadrži $x^2\sqrt[5]{x^4}$.

10. Izračunati: $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$

11. Naći racionalne članove u razvoju $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2}\right)^{24}$.

12. Odrediti član u razvijenom obliku binoma $\left(\sqrt[4]{a^2x} + \sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{13}$ koji ne sadrži x.

13. Odrediti član koji sadrži $x^{8,5}$ u razvoju binoma $\left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2}\right)^{16}$.

Rješenja:

10. 0   11. $k = 14$ 12. $k = 5$ 13. $k = 15$

14. Naći vrijednost promjenjive x u razvoju $(x+x^{\log x})^5$ čiji je treći član razvoja binoma milion (1 000 000).

Rj.
$$(x+x^{\log x})^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{5-k}\cdot\left(x^{\log x}\right)^k=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\underbrace{x^{5-k}\cdot x^{k\log x}}_{x^{5-k+k\log x}}$$

Treći član razvoja ($k=2$) iznosi milion.

$$\binom{5}{2}x^{5-2+2\log x}=1000\,000$$

$$\frac{5\cdot 4}{2}x^{3+2\log x}=1\,000\,000 \quad /:10$$

$$x^{3+2\log x}=100\,000 \quad /\log$$

$$\log x^{3+2\log x}=\log 100\,000$$

$$(3+2\log x)\cdot\log x=5$$

$$2\log^2 x+3\log x-5=0$$

$$\log x=t$$

$$2t^2+3t-5=0$$

$$D=9+40=49 \qquad t_{1,2}=\frac{-3\pm 7}{4}$$

$$t_1=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2} \qquad t_2=1$$

$$\log x=-\frac{5}{2}$$

$$x=10^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{10^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{10^2\cdot 10^2\cdot 10}}=\frac{1}{100\sqrt{10}}$$

$$\log x=1$$

$$x=10$$

Za vrijednosti $x=10$ ili $x=10^{-\frac{5}{2}}$ treći član razvoja ima vrijednost milion.

15. Zaokružite broj $(1{,}01)^7$ na tri decimalna mjesta.

Rj.
$$(1{,}01)^7=(1+0{,}01)^7=(1+10^{-2})^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}1^{7-k}\cdot(10^{-2})^k$$

$$=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}10^{-2k}=\binom{7}{0}10^0+\binom{7}{1}10^{-2}+\binom{7}{2}10^{-4}+\dots$$

$$10^{-2}=0{,}01$$

$$10^{-4}=0{,}0001$$

$$10^{-6}=0{,}000001$$

$$\approx 1\cdot 1+7\cdot 0{,}01+\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot 0{,}0001$$

$$=1+0{,}07+0{,}0021=1{,}072$$

broj zaokružen na tri decimalna mjesta

(16.) Za svaka dva realna broja a i b, i za svaki pozitivan cijeli broj n dokazati da važi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

BINOMNA FORMULA

tj. $(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \dots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$ tj. $a+b = a+b$

Za $k=1$ jednakost je tačna

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$ za $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da vrijedi

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^{(n+1)-i}b^{n+1} \quad \text{tj.}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \dots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=\!=} (a+b)\left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right]$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \dots + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n$$

$$+ \binom{n}{0}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]a^n b + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2 + \dots +$$

$$+ \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} =$$

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \dots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ je tačna za sve pozitivne cijele brojeve n.

17. Naći koeficijent uz x^7 u razvoju $(x^2-x+1)^5$.

Rj. $(x^2-x+1)^5=(1-x+x^2)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(1-x)^{5-k}\cdot(x^2)^k=$

$$=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\left[\sum_{m=0}^{k}\binom{5-k}{m}1^{5-k-m}\cdot(-x)^m\right]x^{2k}=\sum_{k=0}^{5}\sum_{m=0}^{k}\binom{5}{k}\binom{5-k}{m}(-1)^m x^{2k+m}$$

Zanimaju nas koeficijenti uz x^7.

$k=0$, $m=\overline{0,5}$, x^{0+m}, za $k=0$ ne postoji x^7

$k=1$, $m=\overline{0,4}$, x^{2+m}, za $k=1$ ne postoji x^7.

$k=2$, $m=\overline{0,3}$, x^{4+m}, za $k=2$ i $m=3$ imamo x^7

$k=3$, $m=\overline{0,2}$, x^{6+m}, za $k=3$ i $m=1$ imamo x^7

$k=4$, $m=\overline{0,1}$, x^{8+m}, za $k=4$ i za $k=5$ ne postoji x^7

$$\binom{5}{2}\binom{3}{3}(-1)^3x^7+\binom{5}{3}\binom{2}{1}(-1)x^7=\frac{5\cdot4}{2}\cdot(-1)x^7+\frac{5\cdot4}{2}\cdot2\cdot(-1)x^7=-30x^7$$

Koeficijent uz x^7 iznosi -30.

18. Naći posljednje dvije cifre broja 13^9.

Rj. $13^9=(10+3)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}10^{9-k}\cdot3^k=\sum_{k=0}^{7}\binom{9}{k}10^{9-k}3^k+\underbrace{\binom{9}{8}}_{9}10\,3^8+3^9$

$$=\sum_{k=0}^{7}\binom{9}{k}10^{9-k}3^k+10\cdot3^{10}+3^9,$$

$3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $3^{10}=59049$, $3^9=19683$

Posljednje dvije cifre broja 13^9 su 7 i 3.

19. Odrediti koeficijent uz x^8 u razvoju $\left(2x^3-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^5$.

20. Odrediti koeficijent uz x^4 u izrazu $(\sqrt{x}+x^2)^n$.

21. Ako je p prost broj a m cio broj dokazati, koristeći binomni obrazac da je m^p-m djeljivo sa p.

22. Koristeći binomni obrazac naći posljednje dvije cifre broja 7^9.

23. Naći maksimalan sabirak razvoja $\left(n+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$ gdje je n prirodan broj.

Izračunati x ako je treći član u razvoju binoma $(x^{\log x}+x)^5$ jednak 100.

Rj. $(x^{\log x}+x)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(x^{\log x})^{5-k}(x)^k$

treći član je za $k=2$ tj. $\binom{5}{2}(x^{\log x})^3x^2=100$

$\frac{5\cdot \cancel{4}^{2}}{1\cdot\cancel{2}}x^{3\log x}\cdot x^2=100 \quad /:10$

$x^{3\log x+2}=10 \quad /\log$

$\log x^{3\log x+2}=1$

$(3\log x+2)\log x=1$

$3\log^2 x+2\log x-1=0$

$\log x=t$

$3t^2+2t-1=0$

$D=4+12=16$

$t_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{6}$

$t_1=\frac{-2-4}{6}=-1 \quad t_2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\log x=-1$

$\log x=(-1)\log 10$

$\log x=\log 10^{-1}$

$x=\frac{1}{10}$ jedno rješenje

$\log x=\frac{1}{3}$

$\log x=\log 10^{\frac{1}{3}}$

$x=\sqrt[3]{10}$ drugo rješenje

Odrediti član u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}+\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a^3}}\right)^{35}$ koji sadrži b^6.

Rj. $\left(\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}+\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a^3}}\right)^{35}=\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}+\frac{b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{8}}}\right)^{35}=\left(a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{4}}\right)^{35}$

$=\sum_{k=0}^{35}\binom{35}{k}\left(a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}\right)^{35-k}\cdot\left(a^{-\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{4}}\right)^{k}$

Napisani izraz će sadržavati b^6 ako i samo ako je $\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{35-k} \cdot b^{\frac{k}{4}} = b^6$ tj. $b^{\frac{-70+2k}{3}} \cdot b^{\frac{k}{4}} = b^6$

$$\Rightarrow b^{\frac{-70+2k}{3} + \frac{k}{4}} = b^6 \Rightarrow \frac{-70+2k}{3} + \frac{k}{4} = 6 \quad / \cdot 12$$

$$-280 + 8k + 3k = 72$$

$$11k = 352$$

$k = 32 \Rightarrow$ Tridesettreći član u razvoju binoma sadrži b^6.

(#) Naći sve racionalne članove u razvoju binoma $\left(\sqrt[6]{x} - \sqrt[9]{x}\right)^{42}$.

$$\left(\sqrt[6]{x} - \sqrt[9]{x}\right)^{42} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} \left(\sqrt[6]{x}\right)^{42-k} \left(\sqrt[9]{x}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} x^{7-\frac{k}{6}} \cdot x^{\frac{k}{9}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} x^{7-\frac{k}{6}+\frac{k}{9}}$$

Da bi član u razvoju našeg binoma bio racionalan potrebno je i dovoljno da je $7 - \frac{k}{6} + \frac{k}{9}$ cio broj. tj. da su $\frac{k}{6}$ i $\frac{k}{9}$ cijeli brojevi

$\frac{k}{6}$ je cio broj ako je $k \in \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42\}$

$\frac{k}{9}$ je cio broj ako je $k \in \{0, 9, 18, 27, 36\}$

Racionalni članovi u razvoju binoma su za vrijednost $k = 0$, $k = 18$ i $k = 36$.

Prvi, devetnaesti i tridesetsedmi član u razvoju binoma je racionalan.

Naći sve racionalne članove u razvoju binoma

$$\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[9]{x}\right)^{42}.$$

j:

$$\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[9]{x}\right)^{42}=\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}\left(\sqrt[6]{x}\right)^{42-k}\left(\sqrt[9]{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}x^{7-\frac{k}{6}}\cdot x^{\frac{k}{9}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}x^{7-\frac{k}{6}+\frac{k}{9}}$$

Da bi član u razvoju našeg binoma bio racionalan potrebno je i dovoljno da je $7-\frac{k}{6}+\frac{k}{9}$ cio broj. tj. da su $\frac{k}{6}$ i $\frac{k}{9}$ cijeli brojevi

$\frac{k}{6}$ je cio broj ako je $k\in\{0,6,12,18,24,30,36,42\}$

$\frac{k}{9}$ je cio broj ako je $k\in\{0,9,18,27,36\}$

Racionalni članovi u razvoju binoma su za vrijednost $k=0$, $k=18$ i $k=36$.

Prvi, devetnaesti i tridesetsedmi član u razvoju binoma je racionalan.

\# Odrediti koji članovi u razvoju binoma

$$\left(\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{23}$$ su racionalni pa poslije toga naći njihovu vrijednost.

Rj.
$$\left(\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{23}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}}\right)^{23}=\left(\frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}+\frac{7^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{5}}}\right)^{23}=$$

$$=\left(5^{-\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{5}}\right)^{23}=\sum_{k=0}^{23}\binom{23}{k}\left(5^{-\frac{1}{3}}\right)^{23-k}\cdot\left(7^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{5}}\right)^{k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{23}\binom{23}{k}5^{\frac{-23+k}{3}}\cdot 7^{\frac{k}{4}}\cdot 2^{-\frac{k}{5}}$$

$7^{\frac{k}{4}}$ će biti racionalan za $k\in\{0,4,8,12,16,20\}$

$2^{-\frac{k}{5}}$ će biti racionalan za $k\in\{0,5,10,15,20\}$

Prema tome $7^{\frac{k}{4}}\cdot 2^{-\frac{k}{5}}$ će biti racionalan za $k\in\{0,20\}$

za $k=0$ imamo $5^{\frac{-23+0}{3}}$ da je iracionalan broj.

$k=20$ imamo $5^{\frac{-23+20}{3}}=5^{-\frac{3}{3}}=5^{-1}\in\mathbb{Q}$

Jedini racionalan član u razvoju binoma je dvadeset prvi član (za $k=20$).

Vrijednost ovog člana je $\binom{23}{20}5^{-1}\cdot 7^{5}\cdot 2^{-4}=\frac{23\cdot 11\cdot 7\cdot 7^{5}}{5\cdot 2^{4}}$

$$\binom{23}{20}=\binom{23}{3}=\frac{23\cdot\cancel{22}^{11}\cdot\cancel{21}^{7}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}$$

$$=\frac{23\cdot 11\cdot 7^{6}}{5\cdot 16}$$ ∴ vrijednost dvadesetprvog člana

Da nisam obrnuo članove na početku $\left(\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{23}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[5]{2}}\right)^{23}$ dobili bi da je $k=3$ četvrti član

(#) Izračunati x ako se zna da treći član razvoja $\left(2\cdot\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ ima vrijednost 240.

$$\boxed{\sqrt[4-x]{4}=4^{\frac{1}{4-x}}}$$

Rj. $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(2\sqrt[x]{2^{-1}}\right)^{6-k}\left(\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^k=$

$$=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(2\cdot 2^{-\frac{1}{x}}\right)^{6-k}\left(4\cdot 4^{-\frac{1}{4-x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(2^{1-\frac{1}{x}}\right)^{6-k}\left(4^{1-\frac{1}{4-x}}\right)^k$$

$k=0$ dobijemo prvi član
$k=1$ drugi član
$k=2$ treći član

$$\binom{6}{2}\left(2^{1-\frac{1}{x}}\right)^4\left(4^{1-\frac{1}{2}}\right)^2=240$$

$$\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\left(2^{\frac{x-1}{x}}\right)^4\cdot\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2=240$$

$$3\cdot 5\cdot 2^{\frac{4(x-1)}{x}}\cdot 4=240 \quad /:(4\cdot 5)$$

$$3\cdot 2^{\frac{4(x-1)}{x}}=12 \quad /:3$$

$$2^{\frac{4(x-1)}{x}}=4$$

$$2^{\frac{4(x-1)}{x}}=2^2$$

$$\frac{4(x-1)}{x}=2 \quad /\cdot x \ (x\neq 0)$$

$$4x-4=2x$$

$$2x=4$$

$$x=2$$

Za $x=2$ treći član razvoja binoma ima vrijednost 240.

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

(#) Koliko ima racionalnih članova u razvoju binoma
$(\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{3})^{120}$?

Rj. Koji su racionalni brojevi?

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$(\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{3})^{120}=\sum_{k=0}^{120}\binom{120}{k}(\sqrt[3]{4})^{120-k}(\sqrt[4]{3})^k=\sum_{k=0}^{120}\binom{120}{k}4^{\frac{120-k}{3}}\cdot 3^{\frac{k}{4}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{120}\binom{120}{k}4^{40-\frac{k}{3}}\cdot 3^{\frac{k}{4}}$$

Da bi član bio racionalan, u posljednjem izrazu, potrebno je da je k djeljiv sa 3 (iz izraza $4^{40-\frac{k}{3}}$) i da je k djeljiv sa 4 (iz izraza $3^{\frac{k}{4}}$).
Kako je potrebno da je k djeljiv sa 3 i sa 4 to je potrebno da je k djeljiv i sa 12.
Brojevi djeljivi sa 12 iz intervala 0, 1, 2, ..., 120 su:

0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 i 120

Postoji 11 racionalnih članova u razvoju binoma.